Nichtlineare Gleichungen in einer und mehreren Unbekannten

2. Vorlesung
170 004 Numerische Methoden I

Clemens Brand

25. Februar 2010

Gliederung

Wiederholung, Fragenliste

Nichtlineare Gleichungen in einer Variablen

Was ist. . .

- eine lineare (nichtlineare, polynomiale, algebraische, transzendente) Gleichung?
- eine Nullstelle? . . . mehrfache Nullstelle?
- ein Fixpunkt?

Wie geht. . .

- Intervallhalbierung?. . . Regula Falsi?
- Sekantenmethode?. . . Newton-Verfahren?
- Fixpunkt-Iteration?

Theorie

- Wann, warum und wie schnell findet Intervallhalbierung garantiert eine Nullstelle?

Iteration

Ein Basis-Verfahren der numerischen Mathematik

- Was es ist: Wiederholtes Anwenden eines Rechenschrittes liefert Näherungen, die schrittweise, mit zunehmender Genauigkeit, die Lösung anstreben.
- Typischerweise als *Fixpunkt-Iteration*: Ergebnisse des Rechenschrittes werden Eingabewerte des nächsten Schrittes, bis die Werte genau genug sind.
- Anwendung: wenn es keine „exakten“ Lösungsformeln gibt; und selbst wenn: iterative Verfahren sind oft einfacher, genauer oder effizienter.
- Die Theorie untersucht, ob und wie gut es funktioniert: Existenz, Eindeutigkeit, Konvergenzgeschwindigkeit.

Fixpunkt-Iteration

Das Grundprinzip vieler iterativer Verfahren

Gegeben: eine Funktion $\phi(x)$ und ein Startwert $x^{(0)}$.

Ergebnis: falls konvergent, liefert die Fixpunkt-Iteration einen Fixpunkt ξ von ϕ.

Iterationsvorschrift:
für $k = 0, 1, 2 \ldots$

$$x^{(k+1)} = \phi(x^{(k)})$$

Viele numerische Verfahren lassen sich als Spezialfälle einer Fixpunkt-Iteration betrachten. Aussagen über die Konvergenz von Fixpunkt-Iterationen sind deswegen von allgemeiner Bedeutung.

Fixpunkt-Iteration, mehrdimensional

läuft analog zum eindimensionalen Fall ab

Gegeben: eine Abbildung $\boldsymbol{\Phi} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{x} \to \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{x})$,
ein Startvektor $\mathbf{x}^{(0)}$.

Ergebnis: falls konvergent, ein Fixpunkt $\boldsymbol{\xi}$ von $\boldsymbol{\Phi}$.

Iterationsvorschrift:
für $k = 0, 1, 2 \ldots$

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{x}^{(k)})$$

Im Vergleich zur eindimensionalen Formulierung ändern sich nur die Bezeichnungen:
aus Variable $x \in \mathbb{R}$ wird Vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$,
aus Funktion $f(x)$ wird vektorwertige Funktion $\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{x})$
aus Fixpunkt $\xi \in \mathbb{R}$ wird $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$

Beispiel: Widerstandsbeiwert λ

Formel aus technischem Handbuch berechnet Druckabfall $\Delta p = \lambda \frac{\rho v^2}{2}$

$$\lambda = \frac{1}{(2\log_{10}(Re\sqrt{\lambda}) - 0{,}8)^2}$$

Gegeben: Reynoldszahl $Re = 10^6$
Gesucht: Widerstandsbeiwert λ
Wir rechnen Beispiele:

- Fixpunkt-Iteration
- Umformen auf Nullstellen-Aufgabe, Sekantenmethode
- Nullstellen-Aufgabe, Newton-Verfahren
- Matlab: `fzero`

Fixpunkt-Iteration

Die Gleichung liegt in Fixpunkt-Form vor

$$\lambda = \frac{1}{(2\log_{10}(Re\sqrt{\lambda}) - 0,8)^2}$$

Starte mit Näherung, z.B. für laminarer Strömung, $\lambda^{(0)} = 64/Re$.
Formel auswerten $\rightarrow$ verbesserte Näherung;
iteriere bis zur Konvergenz.

Das funktioniert, weil die Formel auf der rechten Seite *„nicht wirklich stark"* von λ abhängt. (Exakteres Kriterium folgt!)
Liefert in diesem Fall: $\lambda^{(0)} = 6,4 \cdot 10^{-5}$; $\lambda^{(1)} = 0,0204$; $\lambda^{(2)} = 0,0111$; $\lambda^{(3)} = 0,0117$; $\lambda^{(4)} = 0,0116$;
Danach ändert sich die vierte Nachkommastelle nicht mehr.

Sekantenmethode

Umformen auf Nullstellen-Aufgabe $f(x) = 0$

$$f(x) = x - \frac{1}{(2\log_{10}(Re\sqrt{x}) - 0,8)^2}$$

Wähle Startwerte	$a = 0,1; b = 0,01;$
Berechne Funktionswerte	$f(a) = 0,0904; f(b) = -0,0018$
Werte aus:	$c = a - f(a)\dfrac{a-b}{f(a)-f(b)} = 0,0118$
Wiederhole mit neuen a, b	$a = 0,01; b = 0,0118$
Erneut auswerten	$f(a); f(b); c = 0,0116$

Sekantenmethode in Fixpunkt-Form

jeder Schritt berechnet aus zwei alten Werten zwei neue Näherungen

Startvektor $\mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

Iterationsschritt

Als neuer a-Wert wird voriger b-Wert übernommen
Neuer b-Wert wird aus vorigen a und b berechnet

$$\begin{bmatrix} a^{(k+1)} \\ b^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b^{(k)} \\ a^{(k)} - f(a^{(k)}) \frac{a^{(k)} - b^{(k)}}{f(a^{(k)}) - f(b^{(k)})} \end{bmatrix}$$

Funktion $\boldsymbol{\Phi} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$\boldsymbol{\Phi} : \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} b \\ a - f(a) \frac{a-b}{f(a)-f(b)} \end{bmatrix}$$

Newton-Verfahren

Bei diesem Beispiel ist $f(x)$ umständlich zu differenzieren...

$$f'(x) = 1 + \frac{2}{x\log(10)\left(\frac{2\log\left(Re\sqrt{x}\right)}{\log(10)} - 0,8\right)^3}$$

Mit Startwert	$x^{(0)} = 0,01;$
ergibt sich	$f(x^{(0)}) = -0,0018; f'(x^{(0)}) = 1.1115$
neue Näherung	$x^{(1)} = x^{(0)} - f(x^{(0)})/f'(x^{(0)})$
	$x^{(1)} = 0,0116$

Newton-Verfahren in Fixpunkt-Form

Auch das Newton-Verfahren ist ein (eindimensionales) Fixpunkt-Verfahren!

Fixpunkt-Gleichung

$$x = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$
$$x = \phi(x)$$

Bitte verwechseln Sie nicht

Sie suchen die *Nullstelle* einer Funktion $f(x)$.
Das Newton-Verfahren sucht einen *Fixpunkt* der Funktion

$$\phi(x) = x - f(x)/f'(x)$$

Matlab-Funktion `x=fzero(@f, x0)`

- versucht Nullstelle von `f` nahe `x0` (skalarer Startwert) zu finden.
- Findet nur Nullstellen mit Vorzeichenwechsel.
- Für $y = 1/(x+1)$ findet `fzero` als Nullstelle $x = -1$, ohne mit der Wimper zu zucken!
- Kombiniert mehrere Verfahren: Intervallhalbierung, Sekantenmethode und inverse quadratische Interpolation.
- Die Funktion wird in MATLAB als *function M-file* programmiert

```
function y=f(x)
Re=1e6;
y=x-1/(2*log10(Re*sqrt(x))-0.8)^2;
```

Vergleich der Verfahren

für dieses Beispiel

- Fixpunkt-Iteration hier gut geeignet, *weil sich Unterschiede in den Input-Werten nur „schwach“ auf das Resultat auswirken!*
- Berechnen der Ableitung für das Newton-Verfahren ist aufwendig. Sekantenmethode arbeitet ableitungsfrei und braucht pro Schritt grob halb so viel Rechenaufwand wie Newton.
- Genauere Untersuchung zeigt: Zwei Schritte des Sekantenverfahrens bringen mehr Genauigkeit als ein Newton-Schritt $\rightarrow$ rechengünstiger!
- Matlabs `fzero` funktioniert problemlos, wenn man seine Grenzen kennt.

Noch ein Beispiel $x - \epsilon \sin x = m$

Die Kepler-Gleichung setzt verschiedene Parameter einer elliptischen Umlaufbahn in Beziehung

Angenommen, $\epsilon \ll 1$ und $m \geq 0$ sind gegeben; x ist gesucht. Formulieren Sie selber Lösungswege

- graphische Darstellung: wo liegen überhaupt Lösungen?
- Durch Fixpunkt-Iteration
- Als Nullstellen-Aufgabe (hier lässt sich das Newtonsche Verfahren gut anwenden)
- lässt sich (z. B. aus Graphik) ein Einschluss-Intervall angeben?

Reihenentwicklung

Nur damit Sie sehen: nicht alle Näherungsverfahren sind vom Typ der Fixpunkt-Iteration

- Reihenentwicklungen sind ein anderer Typ von Näherungsverfahren (die wir hier nicht weiter behandeln).
- Für die Kepler-Gleichung gilt (unter Vernachlässigung vierter und höherer Potenzen von ϵ):

$$x = m + \left(\epsilon - \frac{\epsilon^3}{8}\right)\sin(m) + \frac{\epsilon^2}{2}\sin(2m) + \frac{3\epsilon^3}{8}\sin(3m) + \dots$$

- Je kleiner ϵ, desto genauer.
- Wenn nicht mehr Reihenglieder angegeben sind, lässt sich die Genauigkeit aber nicht weiter steigern.

Konvergenz des Fixpunktverfahrens

Das Fixpunktverfahren konvergiert lokal, falls $|\phi'(\xi)| < 1$.

Ist $\phi(x)$ in einer Umgebung des Fixpunktes ξ stetig differenzierbar und $|\phi'(\xi)| < 1$, so konvergiert die Fixpunkt-Iteration

$$x^{(k+1)} = \phi(x^{(k)})$$

mindestens linear mit $C \approx |\phi'(\xi)|$ gegen ξ für alle $x^{(0)}$ in der Nähe des Fixpunktes.

Der Fehler nimmt $\approx$ um den Faktor C pro Iteration ab

Interpretation der Bedingung $|\phi'(\xi)| < 1$.

- Salopp formuliert: Fixpunkt-Iteration konvergiert, **wenn $\phi(x)$ „nicht wirklich stark“ von x abhängt.**
- Ableitung ϕ' misst, wie stark sich $\phi(x)$ ändert, wenn sich x ändert.
- Der Konvergenzsatz quantifiziert, „wie stark“ ϕ von x abhängen darf, damit Iteration konvergiert.

Andere Form der Konvergenzbedingung

Unterschiedliche Eingaben bewirken kleinere Unterschiede im Ergebnis

$$|\phi(x) - \phi(y)| \leq C|x - y| \,, \quad C < 1$$

Exakte Formulierung **kontrahierende Abbildung** und Beweis im Skriptum.

Beispiel: $\phi(x) = \frac{9}{4}x(1-x)$

Zwei Fixpunkte: $\xi_1 = 0, \xi_2 = \frac{5}{9}$.
Einsetzen der Fixpunkte in $\phi'(x) = \frac{9}{4}(1-2x)$ liefert

$$|\phi'(0)| = \frac{9}{4} > 1 \qquad |\phi'(\frac{5}{9})| = \frac{1}{4} < 1$$

Folgerungen:

- Für Startwerte in der Nähe von $\xi_2 = \frac{5}{9}$ konvergiert die Fixpunkt-Iteration.
- $\phi(x)$ ändert sich dort nur etwa $1/4$ so stark, wenn sich x-Werte ändern.
- Ein Fehler im Eingabewert bewirkt einen $\approx 1/4$ so großen Fehler im Resultat.
- Wiederholtes Einsetzen macht den Fehler immer kleiner

Lineare und bessere Konvergenz

Der neue Fehler ist mindestens um einen Faktor C kleiner als...

- der alte Fehler: *lineare* Konvergenz
- das Quadrat des alten Fehlers: *quadratische* Konvergenz; typisch für Newton-Verfahren.
- allgemein: die p-te Potenz des alten Fehlers: *Konvergenz p-ter Ordnung*. Bei Sekanten-Verfahren ist $p \approx 1.61$.

Faustregeln

- Lineare Konvergenz braucht eine fixe Anzahl von Schritten pro gültiger Stelle.
- Ein Newton-Schritt verdoppelt die Zahl der gültigen Stellen.
- Ein Sekanten-Schritt erhöht die gültigen Stellenanzahl um etwa 60%.

Konvergenzordnung: Definition

Sei ξ Fixpunkt von $\phi(x)$, und für alle Startwerte aus einem Intervall um ξ und die zugehörige Folge $\{x^{(k)}\}$ aus der Vorschrift $x^{(k+1)} = \phi(x^{(k)})$ verhalten sich die Fehlerschranken $|x^{(k)} - \xi| \leq \epsilon^{(k)}$ gemäß

$$\epsilon^{(k+1)} \leq C \left(\epsilon^{(k)}\right)^p$$

und $C < 1$, falls $p = 1$.

Das Iterationsverfahren heißt dann ein **Verfahren von** (mindestens) ***p*-ter Ordnung**

Konvergenzordnung: Lehrsatz

Zusammenhang zwischen Ableitungen im Fixpunkt und Konvergenzordnung

Ist $\phi(x)$ in einer Umgebung von ξ genügend oft differenzierbar und

$$\phi'(\xi) = 0,\ \phi''(\xi) = 0, \ldots, \phi^{(p-1)}(\xi) = 0, \text{ und } \phi^{(p)}(\xi) \neq 0 \ ,$$

dann liegt für $p = 2, 3, \ldots$ ein Verfahren p-ter Ordnung vor. Ein Verfahren erster Ordnung liegt vor, wenn zu $p = 1$ gilt: $|\phi'(\xi)| < 1$.

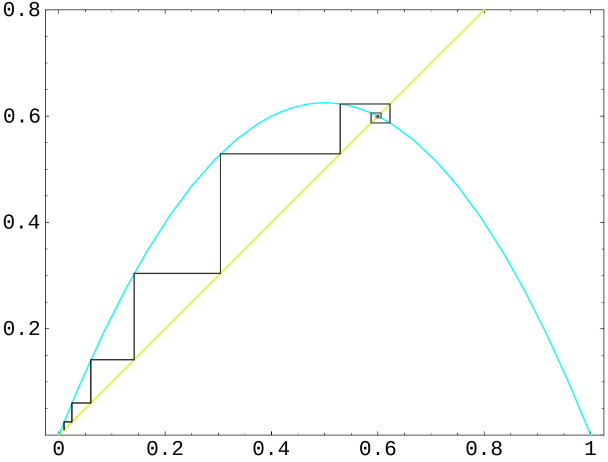
Fixpunkt-Iteration, graphisch interpretiert

waagrecht zur Mediane, senkrecht zur Funktion

Fixpunkt-Iteration

$$x = ax(1 - x)$$

graphisch veranschaulicht für $a = 5/2$
Startwert $x = 1/100$



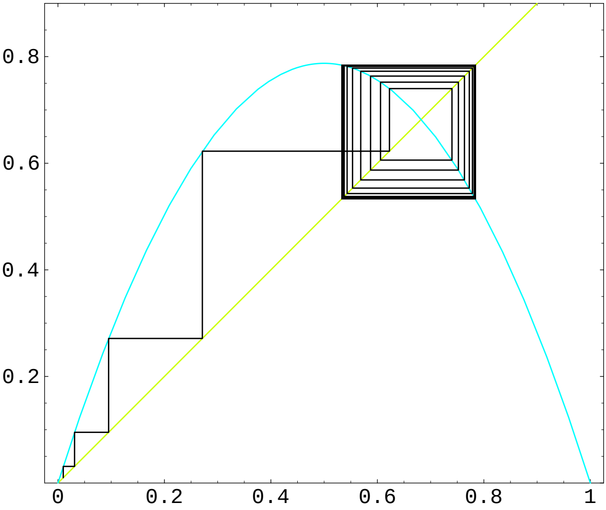
Fixpunkt-Iteration

$$x = ax(1-x)$$

für $a = 3{,}15$
Startwert $x = 1/100$

konvergiert zu
Zyklus
mit Periode 2

weitere Beispiele:
Skriptum-Titelblatt



Ein Prüfungsbeispiel

Die Funktion

$$\phi(x) = \frac{18 - 30\,x + 23\,x^2 - 4\,x^3}{9}$$

hat Fixpunkte für $x = 3/4, 2$ und 3.

1. Rechnen Sie, ausgehend vom Startwert $x^{(0)} = 1$, drei Schritte der Fixpunkt-Iteration.
2. Überprüfen Sie mithilfe der Konvergenzsätze für die verschiedenen Fixpunkte: Konvergiert die Fixpunkt-Iteration $x^{(k+1)} = \phi(x^{(k)})$, und wenn ja, mit welcher Konvergenzordnung?
3. Finden Sie eine Nullstelle von $\phi(x)$ mit dem Newtonschen Verfahren.

Prüfungsbeispiel

Gegeben sei die Funktion

$$\phi(x) = ax(1-x) \qquad \text{für ein } a \neq 0$$

1. Zeigen Sie: $x = 0$ und $x = (a-1)/a$ sind Fixpunkte von ϕ.
2. In welchem Bereich muss a liegen, damit eine Fixpunkt-Iteration lokal zu $x = 0$ konvergiert?
3. In welchem Bereich muss a liegen, damit eine Fixpunkt-Iteration lokal nach $x = (a-1)/a$ konvergiert?
4. Für welchen Wert von a folgt lokal quadratische Konvergenz zum Fixpunkt $x = (a-1)/a$?

Prüfungsbeispiel

Gegeben sei die Funktion $f(x) = x^3 - 1$.

1. Wie lautet die reelle Nullstelle von f?
2. Zeigen Sie: Das Newton-Verfahren zur Nullstellenbestimmung führt auf die Iterationsvorschrift

$$x = \frac{1}{3\,x^2} + \frac{2\,x}{3}$$

3. Leiten Sie die Konvergenzordnung dieser Iteration her.

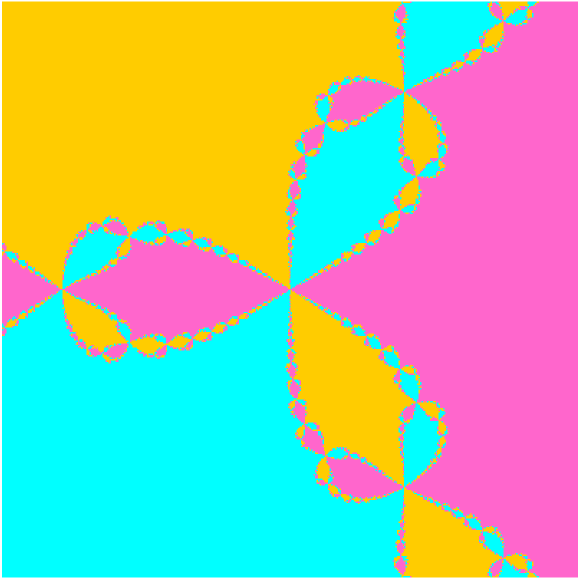
Newton-Raphson für $x^3 - 1 = 0$

Die Formel des Newton-Verfahrens gilt auch für komplexen Zahlen.
Fixpunkt-Gleichung

$$x = \frac{1}{3\,x^2} + \frac{2\,x}{3}$$

konvergiert je nach Startwert zu

$x = 1, -0.5 \pm 0.866025i$



Zwei nichtlineare Gleichungen

Beispiel für Fixpunkt-Iteration

Gegeben sei das nichtlineare Gleichungssystem (log ist natürlich der natürliche Logarithmus)

$$\begin{aligned} 4x - y + xy - 1 &= 0 \\ -x + 6y + \log(xy) - 2 &= 0 \end{aligned}$$

Ausgehend von der Näherungslösung $x_0 = 0{,}3$ und $y_0 = 0{,}6$ bestimme man durch geeignete Fixpunkt-Iteration verbesserten Näherungen x_1 und y_1.

Mehrere Unbekannte: Aufgabentypen

Nichtlineares Gleichungssystem in zwei Unbekannten

$$\begin{aligned} 4x - y + xy &= 1 \\ -x + 6y &= 2 - \log(xy) \end{aligned}$$

Nullstelle einer *vektorwertigen Funktion* $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} 4x - y + xy - 1 &= 0 \\ -x + 6y + \log(xy) - 2 &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f(x, y) &= 0 \\ g(x, y) &= 0 \end{aligned} \qquad \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$$

Fixpunkt einer vektorwertigen Funktion $\boldsymbol{\Phi} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{4}(x_2 - x_1 x_2 + 1) \\ x_2 &= \frac{1}{6}(x_1 - \log(x_1 x_2) + 2) \end{aligned} \qquad \mathbf{x} = \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{x})$$

Beispiel im Skriptum, ab S.21, durchgerechnet!