

## 2 Wechselstromkreise

### 2.1 Einführung komplexer Zeiger

#### 2.1.1 Komplexe Spannung, komplexer Strom

Zur Vereinfachung der mathematischen Behandlung von Wechselstromkreisen wird ein Bezug zwischen sinusförmigen Zeitverläufen und Zeigerdiagrammen in der komplexen Zahlenebene hergestellt. Diese Möglichkeit ist auf sinusförmige Signale beschränkt, und z.B. nicht für Schaltvorgänge (z.B. in Kap. 1) verwendbar.

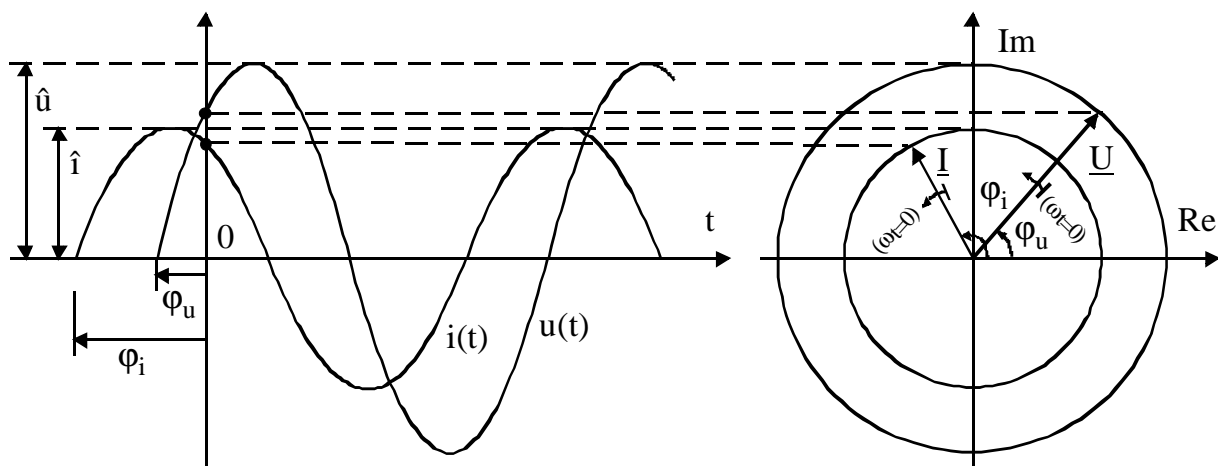


Abb. 2.1

Wie das Beispiel in Abb. 2.1 zeigt, kann der zeitliche Sinusverlauf in die komplexe Zahlenebene projiziert werden.

Es gilt folgende Zuordnung zwischen komplexer Größe  $\underline{U}$  und realer Zeitgröße  $u(t)$ :

*Komplexer Zeiger  $\underline{U}$ :*

*Realer Zeitverlauf  $u(t)$ :*

*Betrag (Länge des Zeigers) -*

*Scheitelwert (Amplitude) oder Effektivwert*

*Phase (Winkel des Zeigers) -*

*Nullphasenwinkel  $j_0$  ( $j_u$ , bzw.  $j_i$ )*

Bei der gewählten Darstellung in Abb. 2.1 rotiert der Zeiger mit fortschreitender Zeit im Gegenuhrzeigersinn, und der Imaginärteil der komplexen Zahl entspricht dem physikalisch auftretenden Momentanwert  $u(t)$ . Der Zeiger selbst gilt also immer nur für einen Zeitaugenblick, und dessen Imaginärteil ist die Momentaufnahme des gerade aktuellen Momentanwerts der Größe  $u(t)$ .

Üblicherweise wird das Zeigerbild für  $t = 0$  gezeichnet, so dass die Winkel der komplexen Zeiger dem Nullphasenwinkel ( $\varphi_u$  und  $\varphi_i$  in Abb. 2.1) entsprechen.

Für die Zeigerdarstellung können die Beträge der Zeiger entweder als Scheitelwerte oder als Effektivwerte der Sinusgrößen maßstäblich eingezeichnet werden. Üblicherweise wird die Darstellung in Effektivwerten verwendet (da z.B. auch die meisten Messgeräte den Effektivwert anzeigen).

### Veranschaulichung anhand Abb. 2.1

Hier ist als Zeigerdiagramm die Momentaufnahme zum Zeitpunkt ( $\omega t = 0$ ) gezeigt, womit die Winkel der Zeiger  $\underline{u}$  und  $\underline{i}$  den Null-Phasenwinkeln (= Phasenwinkel zum Zeitpunkt  $t = 0$ ) von  $u(t)$  und  $i(t)$  entsprechen. Der Imaginärteil der Zeiger repräsentiert den physikalisch realen Momentanwert von  $u(t)$ , bzw.  $i(t)$  zum Zeitpunkt  $t = 0$ .

Zu späteren Zeitpunkten hin (also bei Fortschreiten entlang der  $\omega t$ -Achse im Zeitdiagramm) wird in diesem Beispiel der Momentanwert von  $i(t)$  kleiner, während  $u(t)$  noch im Ansteigen begriffen ist. Das zeigt sich auch im Zeigerdiagramm, wo bei fortschreitender Zeit, also bei Weiterdrehen der Zeiger im Gegenuhrzeigersinn (i.e. mathematisch positive Richtung), der Imaginärteil des Zeigers  $\underline{i}$  bereits absinkt, während jener von  $\underline{u}$  noch ansteigt.

Zur Darstellung einer Sinusgröße ist es ausreichend, den Zeiger für eine bestimmten Zeitaugenblick in der komplexen Ebene darzustellen. Daraus kann der Scheitelwert (oder der Effektivwert, je nach gewähltem Maßstab) und die Phasenverschiebung zum Zeitpunkt  $t = 0$  abgelesen werden und daraus die Sinusschwingung als zeitlicher Verlauf dargestellt werden. Die einzelnen Momentanwerte von  $u(t)$  zu verschiedenen Zeitpunkten werden für die komplexe Zeigerdarstellung also nicht benötigt.

***Man erkennt zeitlich voreilende Signale daran, dass diese im Zeigerdiagramm bei Umlauf in Uhrzeigerrichtung zuerst erreicht werden.***

Im gewählten Beispiel ist  $u(t)$  gegenüber  $i(t)$  um den Winkel  $\Delta\varphi = \varphi_u - \varphi_i$  nacheilend.

Um verschiedene sinusförmige Signale in einem Zeigerdiagramm darzustellen, wird jedes Signal mit Amplitude und Phasenwinkel des selben, beliebig gewählten Zeitpunkts des zeitlichen Verlaufs als Zeiger dargestellt - üblicherweise werden die Zeiger für den Zeitpunkt ( $\omega t = 0$ ), also mit den Null-Phasenwinkeln gezeichnet.

Voraussetzung für die Darstellung verschiedener Signale ist, dass alle Zeitsignale dieselbe Frequenz aufweisen, so dass also alle Zeiger mit der selben Geschwindigkeit rotieren, da die Zeiger nur dann für alle Zeitpunkte (für alle möglichen Zeigerlagen) einen fixen Bezug zueinander aufweisen. In diesem Fall ist also die Darstellung eines einzelnen momentanen Zeigers jeder darzustellenden Sinusgröße ausreichend, um daraus die Amplitude (bzw. meist den Effektivwert) und die gegenseitige - zeitliche - Phasendifferenz der Signale abzulesen.

Für diese Zeiger können alle Rechenregeln für komplexe Zahlen angewendet werden. So ist z.B. die Differenz der Phasenwinkel der beiden komplexen Zeiger  $\underline{u}$  und  $\underline{i}$  gleich der tatsächlichen zeitlichen Phasendifferenz zwischen  $u(t)$  und  $i(t)$ .

**Phasenwinkel  $\varphi$  :**

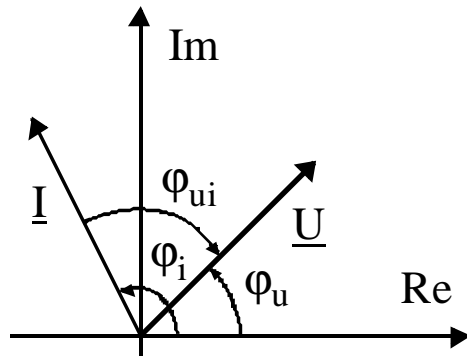


Abb. 2.2

Definition des Phasenwinkels zwischen  $u(t)$  und  $i(t)$ :

$$\varphi := \varphi_{ui} = \varphi_u - \varphi_i \quad (2.1)$$

Abb. 2.2 zeigt den allgemeinsten Fall eines Zeigerdiagramms von  $\underline{U}$  und  $\underline{I}$ . Daraus ist ersichtlich, dass mit der angeführten Definition der **Phasenwinkel  $\varphi_{ui}$  von  $\underline{I}$  nach  $\underline{U}$**  gerichtet ist und in Gegenuhrzeiger-Richtung (also in mathematisch positiver Richtung) positiv gezählt wird.

In Abb. 2.2 ist der Verbraucher als Beispiel Ohm'sch-kapazitiv, erkennbar aus der Nacheilung der Spannung und aus dem negativen Vorzeichen des Phasenwinkels  $\varphi$ .

Unterstrichene Größen (z.B.  $\underline{U}$ ,  $\underline{I}$ ,  $\underline{Z}$ ,  $\underline{Y}$ ,  $\underline{S}$ ) symbolisieren komplexe Zahlen, bestehend aus Realteil und Imaginärteil, bzw. Betrag und Phase:

$\underline{U} = U \angle \varphi_u$  mit:  $\underline{U}$  ..... komplexe Größe mit Betrag und Phase  
 $U$  ..... Effektivwert von  $u(t)$  „Betrag“  
 $\varphi_u$  ... Nullphasenwinkel von  $u(t)$  „Phase“

**Vorteile der komplexen Schreibweise**

Bei der Durchführung von mathematischen Operationen zeigt sich der große Vorteil einer komplexen Schreibweise, wie am Beispiel einer Division zweier Sinus-Signale gezeigt werden soll (dabei seien die Winkel  $\varphi_u$  und  $\varphi_i$  die Null-Phasenwinkel von  $u(t)$  und  $i(t)$  ).

*Zeitdarstellung:*

$$u(t) = \hat{u} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_u)$$

$$i(t) = \hat{i} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_i)$$

$$\frac{u(t)}{i(t)} = \frac{\hat{u} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_u)}{\hat{i} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_i)}$$

*Komplexe Darstellung:*

$$\underline{U} = \hat{u} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_u)} = \hat{u} \angle \varphi_u = (\sqrt{2} \cdot U_{\text{eff}}) \angle \varphi_u$$

$$\underline{I} = \hat{i} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_i)} = \hat{i} \angle \varphi_i = (\sqrt{2} \cdot I_{\text{eff}}) \angle \varphi_i$$

$$\frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{U_{\text{eff}} \angle \varphi_u}{I_{\text{eff}} \angle \varphi_i} = \frac{U_{\text{eff}}}{I_{\text{eff}}} \angle (\varphi_u - \varphi_i)$$

In der Zeitdarstellung sind trigonometrische Formeln zur weiteren Behandlung notwendig, während in der komplexen Schreibweise lediglich die Beträge zu dividieren und die Phasenwinkel zu subtrahieren sind.

In der komplexen Rechnung ist es sinnvoll, für Additionen und Subtraktionen die Darstellung in Realteil und Imaginärteil, sowie für Multiplikationen und Divisionen die Darstellung in Polarkoordinaten (Betrag, Phase) zu verwenden. Ebenso können die mathematischen Grundoperation anschaulich in der komplexen Zahlenebene durch vektorielle Verschiebungen graphisch gelöst werden.

### **Einschränkungen zur komplexen Rechnung**

Wie bereits erläutert, ist die komplexe Zeigerdarstellung nur für sinusförmige Größen von Spannung und Strom möglich, wobei nur eine Frequenz auftreten darf und ausschließlich lineare Elemente (R, L oder C) vorhanden sein dürfen.

## **2.1.2 Komplexe Impedanz $\underline{Z}$**

Die Erweiterung des Ohm'schen Gesetzes auf sinusförmige Wechsignale liefert folgende Grundgleichung für die komplexe Impedanz  $\underline{Z}$ :

$$\underline{Z} = \frac{U}{I} = \frac{U \angle \varphi_u}{I \angle \varphi_i} = \frac{U}{I} \angle (\varphi_u - \varphi_i) = Z \angle \varphi_Z = Z \angle \varphi_{ui} \quad (2.1)$$

Der Winkel  $\varphi_Z$  der Impedanz  $\underline{Z}$  entspricht also dem Phasenwinkel  $\varphi_{ui}$ .

Ohm'scher Verbraucher:  $\underline{Z}_R = R \angle 0^\circ \quad (2.2)$

Induktiver Verbraucher:  $\underline{Z}_L = j \cdot \omega \cdot L = \omega \cdot L \angle 90^\circ \quad (2.3)$

Kapazitiver Verbraucher:  $\underline{Z}_C = \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C} = -j \cdot \frac{1}{\omega \cdot C} = \frac{1}{\omega \cdot C} \angle -90^\circ \quad (2.4)$

### **Impedanzdreieck**

Die Darstellung von  $\underline{Z}$  in der komplexen Zahlenebene mit Realteil und Imaginärteil, bzw. mit Betrag und Phase wird als „Impedanzdreieck“ bezeichnet.

Bei einer Serienschaltung von Verbrauchern können die Impedanzen in einfacher Weise - entweder mittels komplexer Rechnung oder graphisch (vektoriell) in der komplexen Zahlenebene - addiert werden, um die resultierende, komplexe Impedanz  $\underline{Z}$  zu erhalten (siehe Kap. 2.3 und Abb. 2.6, Abb. 2.8).

**Umwandlung Impedanzdreieck ® Admittanzdreieck:**

Bei gegebenem Impedanzdreieck (also gegebener Impedanz  $\underline{Z}$  mit Betrag und Phase) kann das zugehörige Admittanzdreieck dadurch gewonnen werden, dass der Betrag von  $\underline{Z}$  invertiert wird, und - mit entsprechendem Maßstab in der Einheit [S] versehen - in der komplexen Zahlenebene mit einem im Vorzeichen umgekehrten Winkel gezeichnet wird (siehe Kap. 2.3).

Allgemeine Benennungen von Impedanzen:

$$\underline{Z} = R + jX \tag{2.5}$$

$\underline{Z}$  ... Scheinwiderstand ... Impedanz  
 R ... Wirkwiderstand ... Resistanz  
 X ... Blindwiderstand ... Reaktanz

**2.1.3 Komplexe Admittanz  $\underline{Y}$**

Analog zum rein Ohm'schen Leitwert G liefert die Erweiterung auf sinusförmige Wechselsignale folgende Gleichung für die komplexe Admittanz  $\underline{Y}$ :

$$\underline{Y} = \frac{I}{\underline{U}} = \frac{I \angle \varphi_i}{U \angle \varphi_u} = \frac{I}{U} \angle (\varphi_i - \varphi_u) = Y \angle \varphi_Y = Y \angle -\varphi_{ui} \tag{2.6}$$

Der Winkel der Admittanz  $\underline{Y}$  entspricht dem negativen Phasenwinkel  $\varphi_{ui}$ .

Ohm'scher Verbraucher: 
$$\underline{Y}_R = G \angle 0^\circ = \frac{1}{R} \angle 0^\circ \tag{2.7}$$

Induktiver Verbraucher: 
$$\underline{Y}_L = \frac{1}{j \cdot \omega \cdot L} = -j \cdot \frac{1}{\omega \cdot L} = \frac{1}{\omega \cdot L} \angle -90^\circ \tag{2.8}$$

Kapazitiver Verbraucher: 
$$\underline{Y}_C = j \cdot \omega \cdot C = \omega \cdot C \angle 90^\circ \tag{2.9}$$

**Admittanzdreieck**

Die Darstellung von  $\underline{Y}$  in der komplexen Zahlenebene mit Realteil und Imaginärteil, bzw. mit Betrag und Phase wird als „Admittanzdreieck“ bezeichnet.

Bei einer Parallelschaltung von Verbrauchern können die Admittanzen in einfacher Weise - entweder mittels komplexer Rechnung oder graphisch (vektoriell) in der komplexen Zahlenebene - addiert werden, um die resultierende, komplexe Admittanz  $\underline{Y}$  zu erhalten (siehe Kap. 2.3).

**Umwandlung Admittanzdreieck ® Impedanzdreieck:**

Bei gegebenem Admittanzdreieck (also gegebener Admittanz  $\underline{Y}$  mit Betrag und Phase) kann das zugehörige Impedanzdreieck dadurch gewonnen werden, dass der Betrag von  $\underline{Y}$  invertiert wird, und - mit entsprechendem Maßstab in der Einheit  $[\Omega]$  versehen - in der komplexen Zahlenebene mit einem im Vorzeichen umgekehrten Winkel gezeichnet wird (vgl. Abbildungen im Kap. 2.3).

Allgemeine Benennungen von Admittanzen:

$$\underline{Y} = G + jB \tag{2.10}$$

$\underline{Y}$	... Scheinleitwert	... Admittanz
$\underline{G}$	... Wirkleitwert	... Konduktanz
$B$	... Blindleitwert	... Suszeptanz

**2.1.4 Komplexe Scheinleistung  $\underline{S}$**

Definition der Leistungen eines Verbrauchers bei sinusförmiger Wechselspannung:

Scheinleistung [VA]

$$S = U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} \tag{2.11}$$

Wirkleistung [W]

$$P = U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} \cdot \cos \varphi = S \cdot \cos \varphi \tag{2.12}$$

Blindleistung [VAR]

$$Q = U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} \cdot \sin \varphi = S \cdot \sin \varphi \tag{2.13}$$

Leistungsfaktor [-]

$$\cos \varphi = \frac{P}{S} \tag{2.14}$$

Zur Überführung dieser Leistungsbegriffe in die komplexe Zeigerdarstellung wird die **komplexe Scheinleistung  $\underline{S}$**  mit folgender Definition eingeführt:

$$\underline{S} := \underline{U} \cdot \underline{I}^* = U_{\text{eff}} \angle \varphi_u \cdot I_{\text{eff}} \angle -\varphi_i = U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} \angle (\varphi_u - \varphi_i) = S \angle \varphi_{ui} \tag{2.15}$$

mit

$$\underline{I}^* = \operatorname{Re}\{\underline{I}\} - j \operatorname{Im}\{\underline{I}\} = I \angle -\varphi_i \quad (2.16)$$

als konjugiert komplexe Zahl von  $\underline{I}$

Die Verwendung des konjugiert komplexen Wertes von  $\underline{I}$  ist rein mathematisch begründet, denn so ist gewährleistet, dass P und Q als Realteil und Imaginärteil von  $\underline{S}$  dargestellt werden können, um in der komplexen Betrachtung die selben Gleichungen für die Beträge von P, Q und S zu erhalten, wie in der physikalisch realen Zeitdarstellung:

Komplexe Scheinleistung [VA]

$$\underline{S} = P + jQ = S \angle \varphi_{ui} \quad (2.17)$$

Wirkleistung [W]

$$P = \operatorname{Re}\{\underline{S}\} = S \cdot \cos \varphi = U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} \cdot \cos \varphi \quad (2.18)$$

Blindleistung [VAR]

$$Q = \operatorname{Im}\{\underline{S}\} = S \cdot \sin \varphi = U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} \cdot \sin \varphi \quad (2.19)$$

## Leistungsdreieck

Die Darstellung von P in der reellen Achse, Q in der imaginären Achse und S als vektorielle Summe von P und Q wird als „Leistungsdreieck“ bezeichnet, wobei der Winkel von  $\underline{S}$  gleich dem Phasenwinkel  $\varphi_{ui}$  ist (siehe Abbildungen im Kap. 2.3).

### Anmerkung:

Würde man nicht  $\underline{I}^*$  sondern  $\underline{I}$  für die Definition von  $\underline{S}$  verwenden, wäre folgender Ausdruck das Ergebnis für  $\underline{S}$ :

$$\underline{S} := \underline{U} \cdot \underline{I} = U_{\text{eff}} \angle \varphi_u \cdot I_{\text{eff}} \angle \varphi_i = U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} \angle (\varphi_u + \varphi_i) = S \angle (\varphi_u + \varphi_i) \quad (2.20)$$

Das Ergebnis wäre eine komplexe Zahl  $\underline{S}$ , deren Phasenwinkel nicht  $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$  sondern  $\varphi_u + \varphi_i$  beträgt, wodurch sich für P und Q nicht die einfache Beziehung mittels Realteil und Imaginärteil von  $\underline{S}$  ergeben würde.

## 2.2 Einzelne komplexe Impedanzen für R, L, C

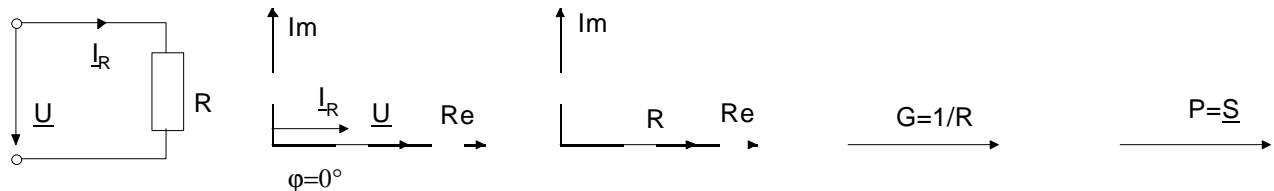


Abb. 2.3

Bei rein Ohm'schen Verbrauchern sind Strom und Spannung immer in Phase ( $\varphi = 0^\circ$ ).

Die gesamte Leistung ist eine reine Wirkleistung ( $\underline{S} = P$ ).

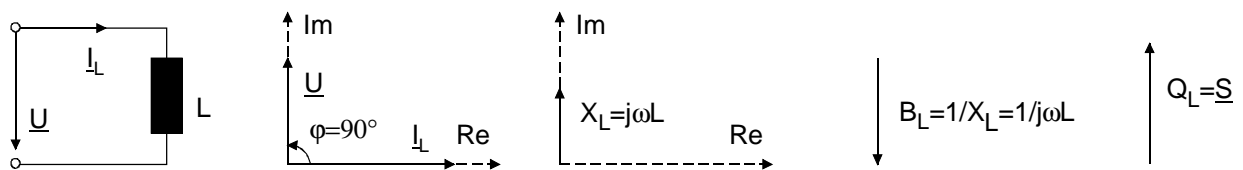


Abb. 2.4

Bei rein induktiven Verbrauchern ist die Spannung über  $L$  immer um  $90^\circ$  gegenüber dem Strom durch  $L$  voreilend ( $\varphi_{ui} = +90^\circ$ ; positiv, da von  $\underline{I}$  nach  $\underline{U}$  im - mathematisch positiven - Gegenuhrzeigersinn gerichtet; vgl. Definition von  $\varphi_{ui}$  in Kap. 2.1)

Die gesamte Leistung ist eine rein induktive Blindleistung (wurde mit positivem Vorzeichen festgelegt;  $\underline{S} = jQ_L$ ).

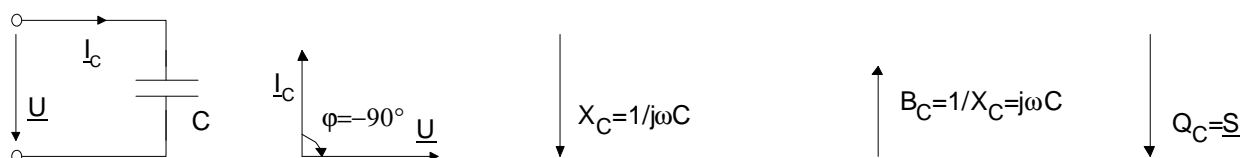


Abb. 2.5

Bei rein kapazitiven Verbrauchern ist die Spannung über  $C$  immer um  $90^\circ$  gegenüber dem Strom durch  $C$  nacheilend ( $\varphi_{ui} = -90^\circ$ ; negativ, da von  $\underline{I}$  nach  $\underline{U}$  im - mathematisch negativen - Uhrzeigersinn gerichtet; vgl. Definition von  $\varphi_{ui}$  in Kap. 2.1)

Die gesamte Leistung ist eine rein kapazitive Blindleistung (wurde mit negativem Vorzeichen festgelegt;  $\underline{S} = -jQ_C$ ).



### 2.3 Schaltungen von zwei komplexe Impedanzen

Nachfolgend sind als Überblick über die komplexe Zeigerdarstellung jeweils zwei Möglichkeiten für Ohm'sch-induktives und für Ohm'sch-kapazitives Verhalten mit allen Zeigerdiagrammen (Spannungs-/Stromzeiger, Impedanzdreieck, Admittanzdreieck, Leistungsdreieck) dargestellt.

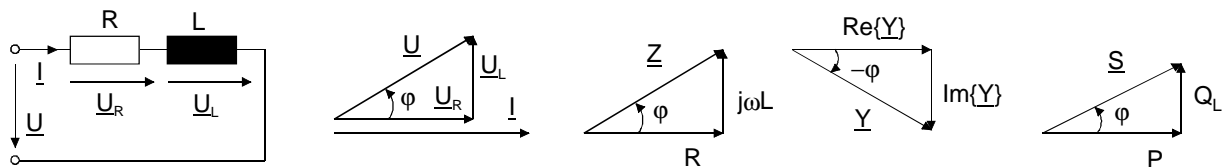


Abb. 2.6 : Ohm'sch-induktives Verhalten mit Serienschaltung von R und L

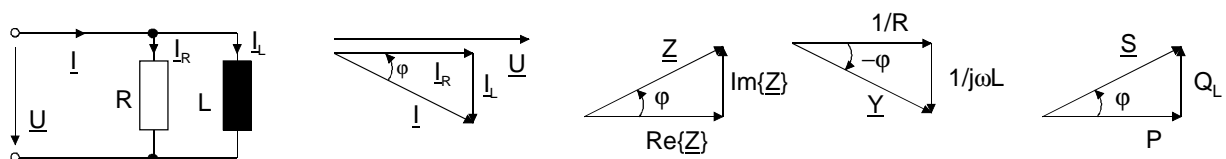


Abb. 2.7 : Ohm'sch-induktives Verhalten mit Parallelschaltung von R und L

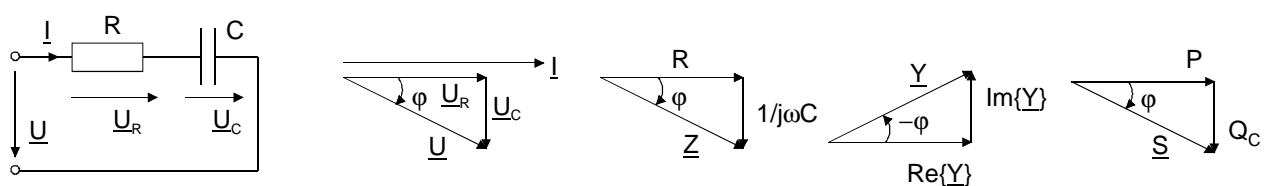


Abb. 2.8 : Ohm'sch-kapazitives Verhalten mit Serienschaltung von R und C

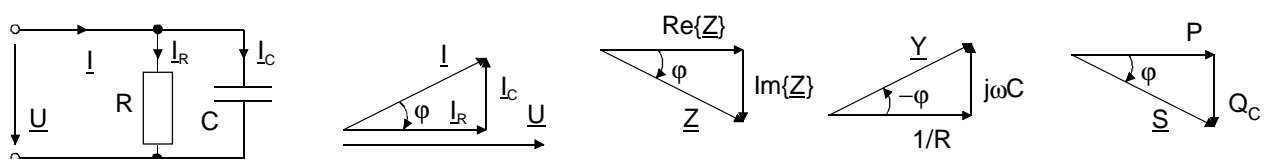


Abb. 2.9 : Ohm'sch-kapazitives Verhalten mit Parallelschaltung von R und C

## Proportionalität der Zeigerdiagramme

Im folgenden wird die Proportionalität zwischen den einzelnen Arten von Zeigerdiagrammen (d.h. gleiche Winkel in den Zeigerdiagrammen) anschaulich hergeleitet.

Bei Betrachtung der Serienschaltung von z.B. R und L in Abb. 2.6 (analoges gilt für R und C in Abb. 2.8) erhalten wir für die Beträge der Teilspannungen:

$U_R = I \cdot R$	Bei Division durch I folgt:	$U_R \approx R$
$U_L = I \cdot X_L$		$U_L \approx X_L$
$U = I \cdot Z$		$U \approx Z$

Bei Serienschaltung sind die Beträge der Impedanzen R, X und Z proportional zu den Beträgen der Spannungen  $U_R$ ,  $U_L$  (bzw.  $U_C$ ) und U.

Weiters erhalten wir folgende Gleichungen für die Leistungen:

$P = U \cdot I \cdot \cos \varphi = U_R \cdot I$	Bei Division durch I folgt:	$P \approx U_R$
$Q = U \cdot I \cdot \sin \varphi = U_L \cdot I$		$Q \approx U_L$
$S = U \cdot I$		$S \approx U$

Bei Serienschaltung sind die Beträge der Leistungen P, Q und S proportional zu den Beträgen der Spannungen  $U_R$ ,  $U_L$  (bzw.  $U_C$ ) und U.

*Das Spannungsdreieck ist proportional zum Impedanzdreieck und proportional zum Leistungsdreieck.*

Bei Betrachtung der Parallelschaltung von z.B. R und L in Abb. 2.7 (analoges gilt für R und C in Abb. 2.9) erhalten wir für die Beträge der Teilströme:

$I_R = \frac{U}{R}$	Bei Division durch U folgt:	$I_R \approx \frac{1}{R} = G$
$I_L = \frac{U}{X_L}$		$I_L \approx \frac{1}{X_L} = B$
$I = \frac{U}{Z}$		$I \approx \frac{1}{Z} = Y$

Bei Parallelschaltung sind die Beträge der Admittanzen G, B und Y proportional zu den Beträgen der Ströme  $I_R$ ,  $I_L$  (bzw.  $I_C$ ) und I.

Weiters erhalten wir folgende Gleichungen für die Leistungen:

$P = U \cdot I \cdot \cos \varphi = U \cdot I_R$	Bei Division durch U folgt:	$P \approx I_R$
--	-----------------------------	-----------------

$$Q = U \cdot I \cdot \sin(-\varphi) = U \cdot I_L$$

$$S = U \cdot I$$

$$Q \approx I_L$$

$$S \approx I$$

Bei Serienschaltung sind die Beträge der Leistungen P, Q und S proportional zu den Beträgen der Ströme  $I_R$ ,  $I_L$  (bzw.  $I_C$ ) und I (wobei Q in umgekehrter Richtung zu  $I_L$ , bzw.  $I_C$  weist, da  $\underline{S}$  mit  $\underline{I}^*$  definiert ist).

Das Stromdreieck ist proportional zum Admittanzdreieck und proportional zum Leistungsdreieck (letzteres mit umgekehrten Vorzeichen von  $\underline{j}$ ).

### Spannungen, Ströme

Bei einer Serienschaltung fließt durch alle Elemente derselbe Strom, so dass es sinnvoll ist, den Strom in die  $0^\circ$ -Richtung zu legen. Die Spannungen über den einzelnen Elementen ergeben sich aus den obigen Grundregeln, und addieren sich - komplex, bzw. vektoriell - in Summe zur Gesamtspannung  $\underline{U}$ .

Bei einer Parallelschaltung liegt an allen Elementen die selbe Spannung an, so dass es sinnvoll ist, die Spannung in die  $0^\circ$ -Richtung zu legen. Die Ströme durch die einzelnen Elemente ergeben sich aus den obigen Grundregeln, und addieren sich - komplex, bzw. vektoriell - in Summe zum Gesamtstrom  $\underline{I}$ .

### Impedanzdreieck, Admittanzdreieck

Bei Serienschaltungen (Abb. 2.6, Abb. 2.8) addieren sich die Impedanzen, so dass diese direkt gezeichnet werden können, während für das Admittanzdreieck die komplexe Impedanz  $\underline{Z}$  zu invertieren ist.

Folglich gilt nicht:  $\text{Re}\{\underline{Y}\}=1/R$ ,  $\text{Im}\{\underline{Y}\}=1/X$ , sondern  $\text{Re}\{\underline{Y}\}$  und  $\text{Im}\{\underline{Y}\}$  ergeben sich aus der komplexen Invertierung von  $\underline{Z}$ .

$$\underline{Z} = R + j \cdot X \quad \rightarrow \quad \underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{R + j \cdot X} \neq \frac{1}{R} + \frac{1}{j \cdot X} \quad \text{!!!!}$$

Bei Parallelschaltungen (Abb. 2.7, Abb. 2.9) addieren sich die Admittanzen, so dass diese direkt gezeichnet werden können, während für das Impedanzdreieck die komplexe Admittanz  $\underline{Y}$  zu invertieren ist.

Folglich gilt nicht:  $\text{Re}\{\underline{Z}\}=1/R$ ,  $\text{Im}\{\underline{Z}\}=1/X$ , sondern  $\text{Re}\{\underline{Z}\}$  und  $\text{Im}\{\underline{Z}\}$  ergeben sich aus der komplexen Invertierung von  $\underline{Y}$ .

$$\underline{Y} = G + j \cdot B = \frac{1}{R} + \frac{1}{j \cdot X} \quad \rightarrow \quad \underline{Z} = \frac{1}{\underline{Y}} = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{j \cdot X}} \neq R + j \cdot X$$

## Leistungsdreieck

Wie bereits gezeigt, ist das Leistungsdreieck proportional zum Spannungsdreieck, bzw. proportional zum Impedanzdreieck.

## Netzwerk: R-L Kombination

Unabhängig davon, ob R und L in Serie oder parallel liegen (Abb. 2.6, Abb. 2.7), ergibt sich immer ein Ohm'sch-induktives Verhalten, d.h. ein positiver Phasenwinkel  $\varphi_{ui}$  zwischen den Gesamtgrößen  $\underline{U}$  und  $\underline{I}$ , sowie ein Winkel mit selbem Vorzeichen und selber Größe für  $\underline{Z}$  und  $\underline{S}$  (bzw. ein negativer Winkel für  $\underline{Y}$ ).

## Netzwerk: R-C Kombination

Unabhängig davon, ob R und C in Serie oder parallel liegen (Abb. 2.8, Abb. 2.9), ergibt sich immer ein Ohm'sch-kapazitives Verhalten, d.h. ein negativer Phasenwinkel  $\varphi_{ui}$  zwischen den Gesamtgrößen  $\underline{U}$  und  $\underline{I}$ , sowie ein Winkel mit selbem Vorzeichen und selber Größe für  $\underline{Z}$  und  $\underline{S}$  (bzw. ein positiver Winkel für  $\underline{Y}$ ).

## 2.4 Schaltungen mit R, L und C Elementen - Resonanzkreise

### 2.4.1 Reihenschaltung von R, L und C Serienresonanz, Spannungsresonanz

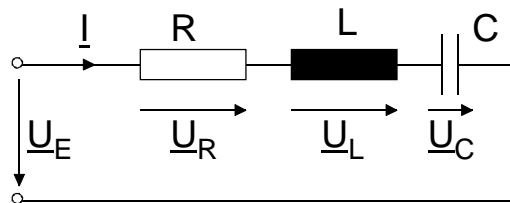


Abb. 2.10

Bei einer Serienschaltung von R, L und C addieren sich - analog zum oben Gesagten (Kap. 2.3) - die Teilspannungen an den einzelnen Elementen (mit komplexer Rechnung oder vektoriell) zur Gesamtspannung  $\underline{U}$ .

Für die gesamte Impedanz  $\underline{Z}$  ergibt sich (vgl. Kap. 2.1.2 - komplexe Impedanzen):

$$\underline{Z} = R + j \cdot \omega \cdot L + \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C} = R + j \cdot \left( \omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C} \right) = \text{Re}\{\underline{Z}\} + j \cdot \text{Im}\{\underline{Z}\} \quad (2.21)$$

Aufgrund der Frequenzabhängigkeit ( $\omega = 2\pi f$ ) von  $\underline{Z}$  lassen sich prinzipiell drei verschiedene Fälle mit folgenden beispielhaften Zeigerdiagrammen unterscheiden:

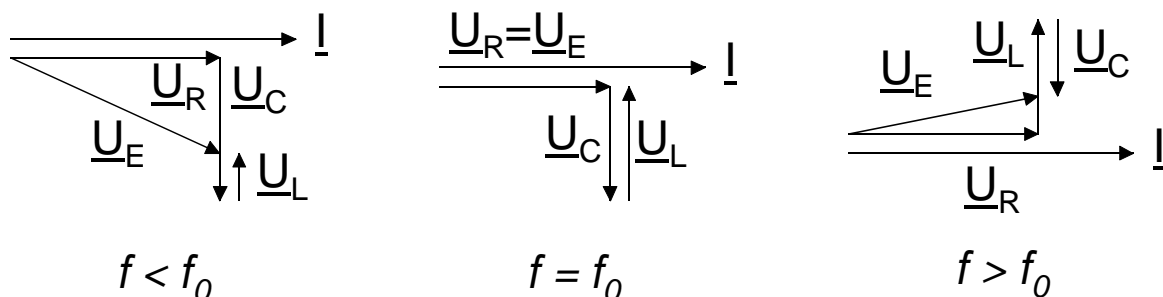


Abb. 2.11

$$f < f_0: \omega \cdot L < \frac{1}{\omega \cdot C} \rightarrow \operatorname{Im}\{\underline{Z}\} < 0, \varphi < 0^\circ, |\underline{U}_L| < |\underline{U}_C| \quad \text{Ohm'sch-kapazitiv} \quad (2.22)$$

$$f = f_0: \omega \cdot L = \frac{1}{\omega \cdot C} \rightarrow \operatorname{Im}\{\underline{Z}\} = 0, \varphi = 0^\circ, |\underline{U}_L| = |\underline{U}_C| \quad \text{rein Ohm'sch} \quad (2.23)$$

$$f > f_0: \omega \cdot L > \frac{1}{\omega \cdot C} \rightarrow \operatorname{Im}\{\underline{Z}\} > 0, \varphi > 0^\circ, |\underline{U}_L| > |\underline{U}_C| \quad \text{Ohm'sch-induktiv} \quad (2.24)$$

Bei kleinen Frequenzen (also kleinem  $\omega$ ) überwiegt die kapazitive Impedanz ( $1/\omega C$ ), es fällt ein größerer Teil der Gesamtspannung an C als an L ab ( $|\underline{U}_C| > |\underline{U}_L|$ ), so dass die Schaltung in Summe Ohm'sch-kapazitiv wirkt (vgl. Abb. 2.11, links). Je kleiner nun die Frequenz wird, desto stärker wirkt die Kapazität, folglich strebt der Phasenwinkel  $\varphi_{ui}$  (zwischen  $\underline{U}_E$  und  $\underline{I}$ ) gegen  $-90^\circ$  (vgl. Abb. 2.12, rechts).

Bei großen Frequenzen (also großem  $\omega$ ) überwiegt die induktive Impedanz ( $\omega L$ ), es fällt ein größerer Teil der Gesamtspannung an L als an C ab ( $|\underline{U}_L| > |\underline{U}_C|$ ), so dass die Schaltung in Summe Ohm'sch-induktiv wirkt (vgl. Abb. 2.11, rechts). Je kleiner nun die Frequenz wird, desto stärker wirkt die Induktivität, folglich strebt der Phasenwinkel  $\varphi_{ui}$  (zwischen  $\underline{U}_E$  und  $\underline{I}$ ) gegen  $+90^\circ$  (vgl. Abb. 2.12, rechts).

## Resonanzfrequenz

Als Resonanzfrequenz wird diejenige Frequenz bezeichnet, bei der die Spannung in Phase mit dem Strom ist. Das bedeutet, dass dabei die induktive Impedanz und die kapazitive Impedanz genau gleich groß sind ( $|X_L| = |X_C|$ ), und sich somit aufgrund ihrer entgegengesetzten Phasenlage gegenseitig aufheben. Folglich heben sich auch die Teilspannungen an den Blindelementen ( $\underline{U}_L$ ,  $\underline{U}_C$ ) aufgrund ihrer entgegengesetzten Phasenlage auf. Es tritt somit eine „**Spannungsresonanz**“ ( $|\underline{U}_L| = |\underline{U}_C|$ ) in dieser Schaltung auf.

Die Teilspannungen an L und an C können auch sehr hohe Werte annehmen („**Resonanzüberhöhung**“), ohne dass dies - aufgrund der gegenseitigen Aufhebung - bei einer Messung der äußeren Gesamtgrößen U und I bemerkt werden würde (siehe Zeigerdiagramm in Abb. 2.11, Mitte).

Aus der Resonanzbedingung der gegenseitigen Aufhebung von  $X_L$  und  $X_C$  folgt:

Resonanz-Kreisfrequenz  $\omega_0$ :

$$\omega \cdot L = \frac{1}{\omega \cdot C} \rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} \quad (2.25)$$

Resonanzfrequenz  $f_0$ :

$$f_0 = \frac{\omega}{2 \cdot \pi} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{L \cdot C}} \quad (2.26)$$

## Impedanz bei Resonanz

Als gesamte Impedanz  $\underline{Z}$  wirkt lediglich R, der Betrag von  $\underline{Z}$  ist ein Minimum, und der gesamte Schaltkreis wirkt nach außen hin wie ein Ohm'scher Widerstand R:

$$|\underline{Z}_0| = \sqrt{\left( R^2 + \left( \omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C} \right)^2 \right)} = \sqrt{R^2 + 0} = R \quad (2.26)$$

$$\underline{Z}_0 = R + j \cdot \left( \omega_0 \cdot L - \frac{1}{\omega_0 \cdot C} \right) = R + j \cdot 0 = R \angle 0^\circ \quad (2.27)$$

## Strom bei Resonanz

Nachdem die Impedanz minimal wird, nimmt der Strom  $\underline{I}$  ein Maximum an. Der Strom bei Resonanz beträgt

$$I_0 = \frac{U}{Z_0} = \frac{U}{R} \quad (2.28)$$

und ist in Phase zu  $\underline{U}$ .

In der folgenden Abb. 2.12 sind die charakteristischen Verläufe der Beträge der Gesamtimpedanz  $\underline{Z}$  und des Gesamtstromes  $\underline{I}$  sowie der Verlauf des Gesamt-Phasenwinkels  $\varphi$  in prinzipieller Form dargestellt.

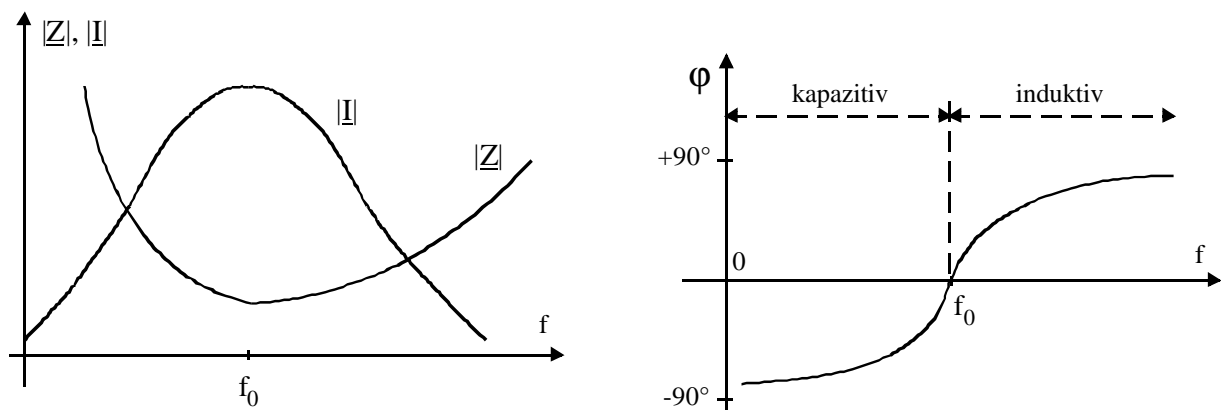


Abb. 2.12

## 2.4.2 Parallelschaltung von R, L und C Parallelresonanz, Stromresonanz

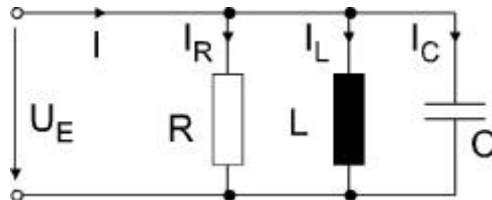


Abb. 2.13

Bei einer Parallelschaltung von R, L und C addieren sich - analog zum oben Gesagten (Kap. 2.3) - die Teilströme durch die einzelnen Elemente (mit komplexer Rechnung oder vektoriell) zum Gesamtstrom  $\underline{I}$ .

Für die gesamte Admittanz  $\underline{Y}$  ergibt sich (siehe Kap. 2.1.3 - komplexe Admittanzen):

$$\underline{Y} = G + j \cdot B_L + j \cdot B_C = \frac{1}{R} + \frac{1}{j \cdot \omega \cdot L} + j \cdot \omega \cdot C = \frac{1}{R} + j \cdot \left( \omega \cdot C - \frac{1}{\omega \cdot L} \right) = \text{Re}\{\underline{Y}\} + j \cdot \text{Im}\{\underline{Y}\} \quad (2.29)$$

Aufgrund der Frequenzabhängigkeit ( $\omega = 2\pi f$ ) von  $\underline{Y}$  lassen sich prinzipiell drei verschiedene Fälle mit folgenden beispielhaften Zeigerdiagrammen unterscheiden:

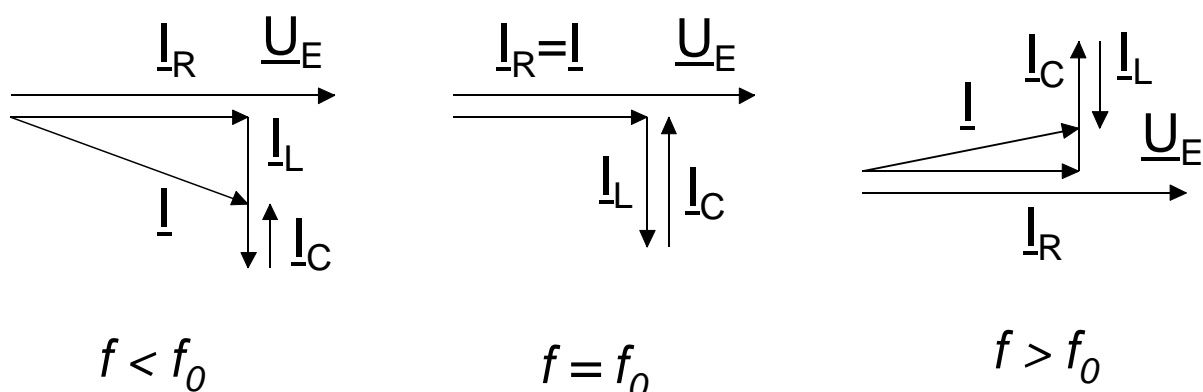


Abb. 2.14

$$f < f_0: \omega \cdot C < \frac{1}{\omega \cdot L} \rightarrow \text{Im}\{\underline{Y}\} < 0, \varphi > 0^\circ, |\underline{I}_C| < |\underline{I}_L| \quad \text{Ohm'sch-induktiv} \quad (2.30)$$

$$f = f_0: \omega \cdot C = \frac{1}{\omega \cdot L} \rightarrow \text{Im}\{\underline{Y}\} = 0, \varphi = 0^\circ, |\underline{I}_C| = |\underline{I}_L| \quad \text{rein Ohm'sch} \quad (2.31)$$



$$f > f_0: \omega \cdot C > \frac{1}{\omega \cdot L} \rightarrow \operatorname{Im}\{Y\} > 0, \varphi < 0^\circ, |I_C| > |I_L| \quad \text{Ohm'sch-kapazitiv} \quad (2.32)$$

Bei kleinen Frequenzen (also kleinem  $\omega$ ) überwiegt die induktive Admittanz ( $1/\omega L$ ), es fließt ein größerer Teil des Gesamtstromes durch L als durch C ( $|I_L| > |I_C|$ ), so dass die Schaltung in Summe Ohm'sch-induktiv wirkt (siehe Abb. 2.14, links). Je kleiner nun die Frequenz wird, desto stärker wirkt die Induktivität, folglich strebt der Phasenwinkel  $\varphi_{ui}$  (zwischen  $\underline{U}_E$  und  $I$ ) gegen  $+90^\circ$  (siehe Abb. 2.15, rechts).

Bei großen Frequenzen (also großem  $\omega$ ) überwiegt die kapazitive Admittanz ( $\omega C$ ), es fließt ein größerer Teil des Gesamtstromes durch C als durch L ( $|I_C| > |I_L|$ ), so dass die Schaltung in Summe Ohm'sch-kapazitiv wirkt (siehe Abb. 2.14, rechts). Je größer nun die Frequenz wird, desto stärker wirkt die Kapazität, folglich strebt der Phasenwinkel  $\varphi_{ui}$  (zwischen  $\underline{U}_E$  und  $I$ ) gegen  $-90^\circ$  (siehe Abb. 2.15, rechts).

## Resonanzfrequenz

Als Resonanzfrequenz wird diejenige Frequenz bezeichnet, bei der die Spannung und der Strom in Phase sind. Das bedeutet, dass dabei die induktive Admittanz  $B_L (=1/X_L)$  und die kapazitive Admittanz  $B_C (=1/X_C)$  betragsmäßig genau gleich groß sind, und sich somit aufgrund ihrer entgegengesetzten Phasenlage gegenseitig aufheben. Folglich heben sich auch die Teilströme durch die Blindelemente ( $I_L, I_C$ ) aufgrund ihrer entgegengesetzten Phasenlage auf. Es tritt somit eine „**Stromresonanz**“ ( $|I_C| = |I_L|$ ) in dieser Schaltung auf.

Die Teilströme durch L und C können auch sehr hohe Werte annehmen („**Resonanzüberhöhung**“), ohne dass dies - aufgrund der gegenseitigen Aufhebung - bei einer Messung der äußeren Größen U und I bemerkt werden würde (siehe Zeigerdiagramm in Abb. 2.14, Mitte).

Aus der Resonanzbedingung der gegenseitigen Aufhebung von  $B_L$  und  $B_C$  folgt:

Resonanz-Kreisfrequenz  $\omega_0$ :

$$\omega \cdot L = \frac{1}{\omega \cdot C} \rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} \quad (2.33)$$

Resonanzfrequenz  $f_0$ :

$$f_0 = \frac{\omega}{2 \cdot \pi} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{L \cdot C}} \quad (2.34)$$

Es ergibt sich also für diese Schaltung dieselbe Berechnung für die Resonanzfrequenz wie für die Serienschaltung aus R, L und C.

### Admittanz bei Resonanz

$$\underline{Y}_0(\omega_0) = \frac{1}{R} + j \cdot \left( \omega_0 \cdot C - \frac{1}{\omega_0 \cdot L} \right) = \frac{1}{R} + j \cdot (0) = \frac{1}{R} = G \quad \underline{Y}_0 = \frac{1}{R} \angle 0^\circ \quad (2.35)$$

$$\underline{Z}_0 = \frac{1}{\underline{Y}_0} = \frac{1}{\frac{1}{R} + j \cdot \left( \omega_0 \cdot C - \frac{1}{\omega_0 \cdot L} \right)} = R \angle 0^\circ \quad (2.36)$$

Bei Resonanzfrequenz wirkt als gesamte Admittanz  $\underline{Y}$  lediglich  $G (=1/R)$ , der Betrag von  $\underline{Y}$  ist ein Minimum, folglich die Impedanz  $\underline{Z}$  ein Maximum, und der gesamte Schaltkreis wirkt nach außen hin wie ein Ohm'scher Widerstand mit  $G (=1/R)$ .

### Strom bei Resonanz

Nachdem die Impedanz maximal, bzw. die Admittanz minimal wird, nimmt der Strom  $\underline{I}$  ein Minimum an. Der Strom bei Resonanz beträgt

$$I_0 = \frac{U}{Z_0} = U \cdot Y_0 = \frac{U}{R} = U \cdot G \quad (2.37)$$

und ist in Phase zu  $\underline{U}$ .

In der folgenden Abb. 2.15 sind die charakteristischen Verläufe der Beträge der Gesamtimpedanz  $\underline{Z}$  und des Gesamtstromes  $\underline{I}$  sowie der Verlauf des Gesamt-Phasenwinkels  $\varphi$  in ihrer prinzipiellen Form dargestellt.

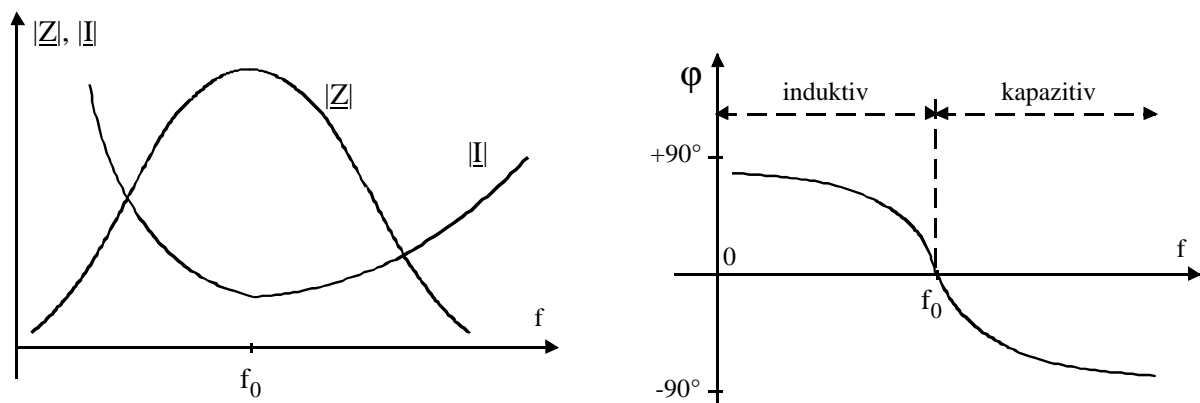


Abb. 2.15

### Realer Resonanzkreis

Bei Verwendung realer Bauelemente sind auch deren Verluste (z.B. die Verluste einer Spule, welche durch einen Ohm'schen Widerstand berücksichtigt werden können) zu berücksichtigen, um den Messfehler gering zu halten.

## 2.5 Blindleistungskompensation

Wie bereits in Kap. 2.4 gezeigt wurde, kann bei gegebenen Werten der Blindelemente  $L$  und  $C$  durch geeignete Wahl der Frequenz erreicht werden, dass sich die Gesamtschaltung wie ein rein Ohm'scher Verbraucher verhält. Das bedeutet, die Eingangsgrößen  $\underline{U}$  und  $\underline{I}$  sind in Phase und die Gesamtschaltung nimmt keine Blindleistung  $Q$ , sondern ausschließlich Wirkleistung  $P$  auf.

Für die Betrachtungen in diesem Kapitel gehen wir nun von einem Ohm'sch-induktiven Verbraucher aus, welcher z.B. als Reihenschaltung von  $R$  und  $L$  beschrieben wird (Abb. 2.16). Diese kann z.B. einen Elektromotor symbolisieren.

Es soll nun eine Kapazität  $C$  bestimmt werden, die parallel zu dieser  $R$ - $L$ -Reihenschaltung anzuschließen ist, so dass die Gesamtschaltung keine Blindleistung aufnimmt, sich also wie ein rein Ohm'scher Verbraucher verhält (Abb. 2.17).

Im Unterschied zum vorigen Kapitel sind nun umgekehrt die notwendigen Blindelemente (zumindest eines davon) gesucht, so dass sich bei gegebener Frequenz ein reiner Wirkleistungsverbraucher ergibt.

Nachdem dabei die durch die Induktivität  $L$  hervorgerufene Blindleistung durch die parallel geschaltene Kapazität  $C$  zu Null kompensiert wird, spricht man allgemein von „**Blindleistungskompensation**“. Wenn, wie in diesem Beispiel, die Kompensation durch Parallelschaltung eines Blindelements erfolgt, wird der Blindanteil des Stromes zu Null kompensiert, so dass hier auch der Ausdruck „**Blindstromkompensation**“ verwendet wird.

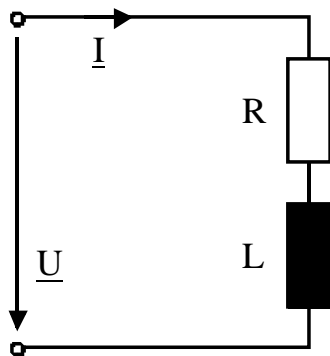


Abb. 2.16

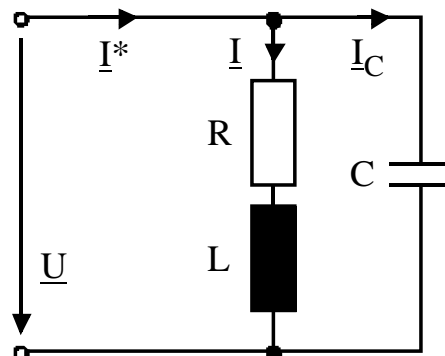


Abb. 2.17

Zur Veranschaulichung der komplexen Rechnung sollen im folgenden zwei Möglichkeiten zur Bestimmung der Kompensationskapazität  $C$  erläutert werden.

### 1. Möglichkeit - mit Spannungs-/Strom-Zeigerdiagramm

Wenn Eingangsspannung und Eingangsstrom, d.h.  $|\underline{U}|$  und  $|\underline{I}|$  gemessen werden, kann man anhand des Spannungs-/Strom-Zeigerdiagrammes die Bestimmung von C in folgenden Schritten durchführen:

a.) Ausgangspunkt

Die Schaltung in Abb. 2.16 wird zuerst für die R-L-Kombination noch ohne C mit dem Zeigerdiagramm nach Abb. 2.18 betrachtet, und danach die kompensierte Schaltung mit paralleler Kapazität C (Abb. 2.17) mit dem zugehörigen Zeigerdiagramm nach Abb. 2.19.

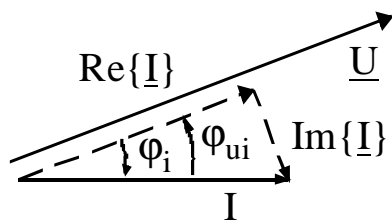


Abb. 2.18

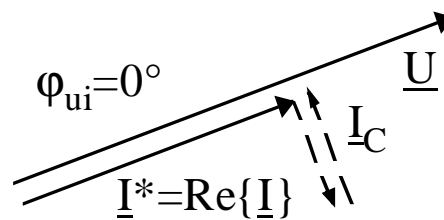


Abb. 2.19

Eine Größe darf in Zeigerdiagrammen beliebig angenommen werden, so dass z.B. in Abb. 2.18 der Strom  $\underline{I}$  in die horizontale Richtung gelegt wird (so dass sich für  $\underline{U}$  und  $\underline{I}$  ein Zeigerdiagramm wie in Kap. 2.3, Abb. 2.6 ergibt).

Im folgenden ist es einfacher, die Richtung von  $\underline{U}$  in Abb. 2.18 als  $0^\circ$ -Richtung anzusehen, um so für die Projektionen von  $\underline{I}$  parallel, bzw. normal zu  $\underline{U}$  die Bezeichnungen  $\text{Re}\{\underline{I}\}$ , bzw.  $\text{Im}\{\underline{I}\}$  verwenden zu können.

$$\underline{U} = U \angle 0^\circ$$

$$\underline{I} = I \angle \varphi_i = \text{Re}\{\underline{I}\} + j \cdot \text{Im}\{\underline{I}\}$$

b.) Bestimmung des zu kompensierenden Phasenwinkels  $\varphi$ :

$$\underline{Z} = Z \angle \varphi_z = \text{Re}\{\underline{Z}\} + j \cdot \text{Im}\{\underline{Z}\} = R + j \cdot \omega \cdot L \tag{2.38}$$

$$\varphi = \arctan \frac{\text{Im}\{\underline{Z}\}}{\text{Re}\{\underline{Z}\}} = \arctan \frac{\omega \cdot L}{R} \tag{2.39}$$

c.) Bedingung für Kompensation

Damit der neue Strom  $\underline{I}^*$  in Phase zu  $\underline{U}$  ist, muss der zusätzliche Strom  $\underline{I}_C$  betragsmäßig gleich groß sein wie  $\text{Im}\{\underline{I}\}$  (siehe Abb. 2.19):

$$|\underline{I}_C| = |\text{Im}\{\underline{I}\}| = |\underline{I}| \cdot \sin \varphi \tag{2.40}$$

Daraus ergibt sich unmittelbar die notwendige kapazitive Impedanz  $\underline{Z}_C$ :

$$\underline{Z}_C = \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C} = \frac{\underline{U}}{I_C} \quad (2.41)$$

Der Betrag der Impedanz beträgt:

$$|\underline{Z}_C| = \frac{1}{\omega \cdot C} = \frac{|\underline{U}|}{|I_C|} = \frac{|\underline{U}|}{|\underline{I}| \cdot \sin \varphi} \quad (2.42)$$

Somit ergibt sich die erforderliche Kompensationskapazität C zu:

$$C = \frac{|\underline{I}| \cdot \sin \varphi}{|\underline{U}| \cdot 2 \cdot \pi \cdot f} \quad (2.43)$$

mit

$$\varphi = \arctan\left(\frac{\omega \cdot L}{R}\right)$$

und  $|\underline{U}|$ ,  $|\underline{I}|$  als Messgrößen.

## 2. Möglichkeit - mit Impedanz- und Admittanzdreieck

Ohne Messung von Spannung und Strom kann die notwendige Kapazität C über die Impedanzen, bzw. Admittanzen berechnet werden.

Damit  $\underline{I}$  in Phase zu  $\underline{U}$  ist, muss sowohl der Winkel der neuen Gesamtimpedanz  $\underline{Z}^*$  (inkl. parallelem C) als auch jener der neuen Gesamt-Admittanz  $\underline{Y}^*$  Null werden.

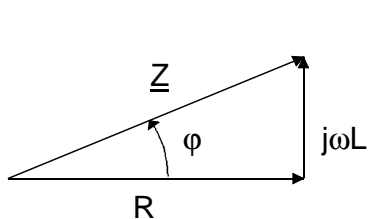


Abb. 2.20

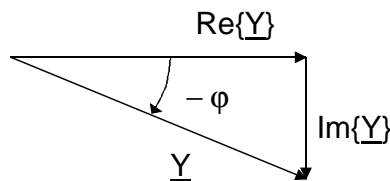


Abb. 2.21

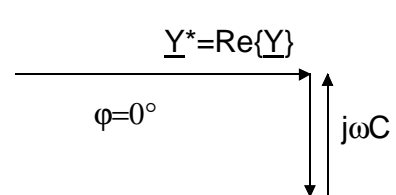


Abb. 2.22

Da in diesem Fall die Kapazität C parallel hinzugeschaltet wird, ist es einfacher, mit Admittanzen zu rechnen, da diese bei Parallelschaltungen einfach addiert werden können (siehe Kap. 2.3), so dass die Berechnung in folgenden Schritten abläuft:

a.) Berechnen der Impedanz  $\underline{Z}$  der Serienschaltung aus R und L (Abb. 2.20):

$$\underline{Z} = Z \angle \varphi_Z = \text{Re}\{\underline{Z}\} + j \cdot \text{Im}\{\underline{Z}\} = R + j \cdot \omega \cdot L$$

$$|\underline{Z}| = \sqrt{R^2 + (\omega \cdot L)^2} \quad (2.44)$$

b.) Umrechnen dieser Impedanz in eine Admittanz  $\underline{Y}$  (Abb. 2.21):

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{R + j \cdot \omega \cdot L} \quad (2.45)$$

$$|\underline{Y}| = \frac{1}{|\underline{Z}|} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + (\omega \cdot L)^2}} \quad (2.46)$$

c.) Bedingung für Kompensation

Die - komplexe, bzw. vektorielle - Addition dieser Admittanz mit der Admittanz  $\underline{Y}_C$  des parallelen Kondensators muss eine neue Gesamt- Admittanz  $\underline{Y}^*$  ergeben, deren Imaginärteil Null ist (Abb. 2.22). Somit müssen  $\underline{Y}_C$  und  $\text{Im}\{\underline{Y}\}$  betragsmäßig gleich groß sein, bzw. sich vektoriell gegenseitig aufheben:

$$|\underline{Y}_C| = |\text{Im}\{\underline{Y}\}| = |\underline{Y}| \cdot \sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{R^2 + (\omega \cdot L)^2}} \cdot \sin \varphi \quad (2.47)$$

Für  $\sin \varphi$  folgt aus Abb. 2.20, bzw. Abb. 2.21:

$$\sin \varphi = \frac{\text{Im}\{\underline{Y}\}}{|\underline{Y}|} = \frac{\text{Im}\{\underline{Z}\}}{|\underline{Z}|} = \frac{\omega \cdot L}{|\underline{Z}|} = \frac{\omega \cdot L}{\sqrt{R^2 + (\omega \cdot L)^2}} \quad (2.48)$$

Damit ergibt sich für die notwendige Admittanz von C aus Gleichung (2.47) und (2.48):

$$|\underline{Y}_C| = \frac{\omega \cdot L}{R^2 + (\omega \cdot L)^2} \quad (2.49)$$

Aus  $|\underline{Y}_C| = \omega \cdot C$  (siehe Kap. 2.1.3) folgt für die notwendige Kompensationskapazität C:

$$C = \frac{L}{R^2 + (\omega \cdot L)^2} \quad (2.50)$$